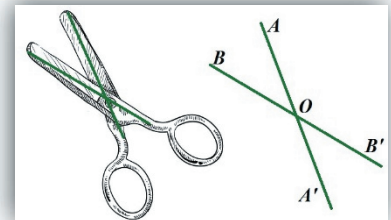


LECȚIA 3. Unghiuri opuse la vârf. Unghiuri formate în jurul unui punct

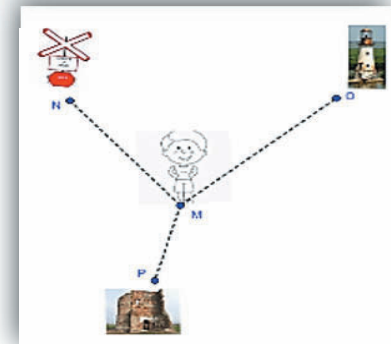


A1. a) Priviți foarfeca deschisă, precizați câte perechi de unghiuri congruente, cu același vârf, s-au format și pozițiile laturilor unghiurilor din aceeași pereche.

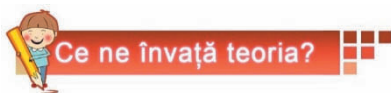
b) Dreptele AA' și BB' concurente în O , determină perechile de unghiuri congruente AOB și $A'OB'$, respectiv AOB' și $A'OB$, cu proprietatea că laturile unuia dintre unghiuri sunt semidreptele opuse semidreptelor care formează celălalt unghi din pereche. Cum se numesc perechile de unghiuri cu această proprietate?



A2. Dan, aflat în punctul M , trasează trei semidrepte imaginare, de origine M și extremități punctele: N (semnalizatorul de cale ferată), O (un far) și P (ruinele unei biserici). Numiți cele trei unghiuri astfel formate și precizați:



a) dacă interioarele oricărei perechi dintre cele trei unghiuri, au puncte comune; **b)** dacă reuniunea celor trei unghiuri cu interioarele lor este întreg planul; **c)** cum se numesc unghiurile care îndeplinesc condițiile: au același vârf; două câte două nu au puncte interioare comune; reuniunea cu interioarele lor este întreg planul; **d)** cu cât este egală suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct ?



1. Două unghiuri cu același vârf și cu laturile perechi de semidrepte opuse se numesc **unghiuri opuse la vârf**.

Exemplu: În figura de la **A1**, unghiurile AOB și $A'OB'$ sunt opuse la vârf.

2. Dacă două unghiuri sunt opuse la vârf, atunci ele sunt congruente.

Justificare: Într-adevăr, dacă unghiurile AOB și $A'OB'$ sunt opuse la vârf, atunci perechile: OA și OA' , respectiv OB și OB' , sunt de semidrepte opuse. Deci, perechile de unghiuri: AOB și $A'OB'$, respectiv AOB' și $A'OB$ sunt de unghiuri suplementare. Cum unghiurile AOB și $A'OB'$ au același suplement, ele sunt congruente.

3. Trei sau mai multe unghiuri cu același vârf, fără puncte interioare comune și care reunite cu interioarele lor dau întreg planul, se numesc **unghiuri în jurul unui punct**.

Exemplu: Unghiurile OMP , PMN , NMO din desenul de la **A2** sunt unghiuri în jurul punctului M .

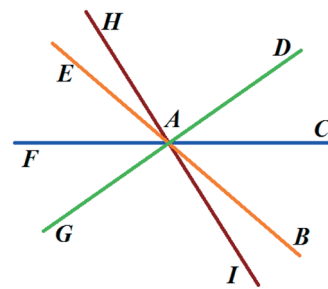
4. Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este egală cu 360° .



Să vedem ce am înțeles

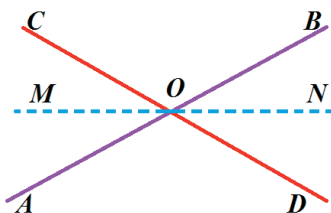
Pentru figura alăturată, să scriem:

- Perechi de unghiuri opuse la vârf;
- Triplete de unghiuri formate în jurul unui punct;
- Perechi de unghiuri care nu sunt opuse la vârf;
- Cvartete de unghiuri care nu sunt unghiuri în jurul unui punct.



Învățăm să rezolvăm

1. Se consideră unghiurile AOC și BOD opuse la vârf. Dacă OM este bisectoarea unghiului AOC și ON este semidreapta opusă lui OM , arătați că ON este bisectoarea unghiului BOD .



Ipoteză: $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle BOD$ opuse la vârf; OM bisectoarea $\sphericalangle AOC$; OM și ON semidrepte opuse.

Concluzie: ON este bisectoarea $\sphericalangle BOD$.

Demonstrație: $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle BOD$ opuse la vârf $\Rightarrow \sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$;

Dacă OM bisectoarea $\sphericalangle AOC \Rightarrow \sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle MOC$ (1).

OM și ON semidrepte opuse \Rightarrow punctele M, O, N coliniare și $\sphericalangle AOM$,

$\sphericalangle BON$ opuse la vârf. Deci $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BON$ (2). Analog se arată că $\sphericalangle MOC \equiv \sphericalangle NOD$ (3).

Din relațiile (1), (2) și (3) obținem $\sphericalangle BON \equiv \sphericalangle NOD \Rightarrow ON$ este bisectoarea $\sphericalangle BOD$.

2. Fie O un punct situat pe segmentul AA' și B, B' două puncte de o parte și de alta a dreptei AA' .

a) Dacă $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'OB'$, atunci semidreptele OB și OB' sunt opuse;

b) Dacă două unghiuri congruente AOB și $A'OB'$ au laturile OA, OA' semidrepte opuse, iar OB, OB' sunt de o parte și de alta a dreptei AA' , atunci cele două unghiuri sunt opuse la vârf.

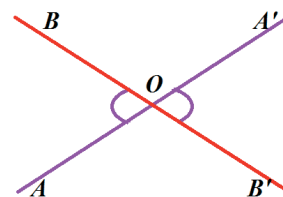
Ipoteză: a) $O \in AA'$; B, B' de o parte și de alta a dreptei AA' ;

$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'OB'$; b) $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'OB'$; OA, OA' semidrepte

opuse; OB, OB' de o parte și de alta a dreptei AA' .

Concluzie: a) OB, OB' semidrepte opuse; b) $\sphericalangle AOB, \sphericalangle A'OB'$ sunt

opuse la vârf.



Demonstrație: a) $\sphericalangle A'OB' + \sphericalangle BOA' = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle BOB' = 180^\circ$. Deci OB, OB' sunt semidrepte opuse. b) aceeași rezolvare ca la punctul a).

Observație: Aceste enunțuri formează **teoremele reciproce ale unghiurilor opuse la vârf**.



1. Observă configurațiile din figura 1 și selectează afirmațiile adevărate:

- a) Unghiurile AOB și $A'OB'$ sunt opuse la vârf;
- b) Unghiurile ETD și FTC sunt opuse la vârf;
- c) Unghiurile AOB' și $A'OB$ nu sunt opuse la vârf;
- d) Unghiurile ETF și CTD nu sunt opuse la vârf.

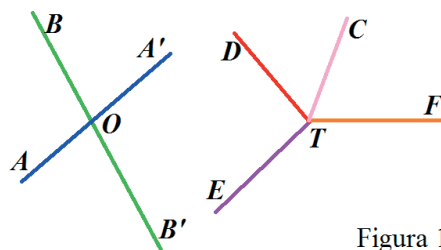


Figura 1

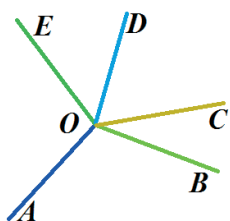


Figura 2

2. Observă figura 2 și selectează afirmațiile adevărate:

- a) unghiurile AOB, BOC, COD, DOE și AOE sunt unghiuri în jurul unui punct;
- b) unghiurile AOB, BOC, COD și DOE nu sunt unghiuri în jurul unui punct;
- c) unghiurile AOB, BOD și AOE nu sunt unghiuri în jurul unui punct;
- d) unghiurile AOC, COE și AOE sunt unghiuri în jurul unui punct;
- e) unghiurile AOC, BOD, DOE și AOE sunt unghiuri în jurul unui punct.

3. a) Reprodu în caiet desenul alăturat (figura 3);
 b) Scrie unghiul opus la vârf unghiului AOC , apoi scrie încă trei perechi de unghiuri opuse la vârf;
 c) Determină măsurile unghiurilor FOD, COF și AOD ;
 d) Trasează bisectoarele unghiurilor AOC și BOC și arată că acestea formează un unghi drept.

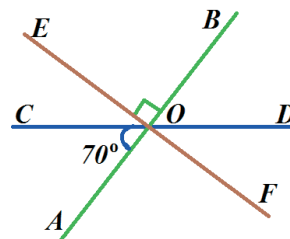
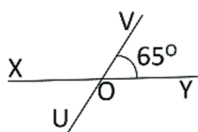
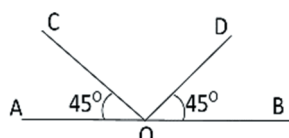


Figura 3

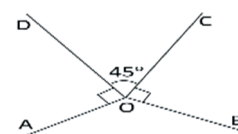
4. Cu notațiile din desenul alăturat determină măsurile unghiurilor XOU și XOV .



5. Cu notațiile din desenul alăturat, determină măsura unghiului COD .



6. Cu notațiile din desenul alăturat determină măsura unghiului AOB .



7. În triunghiul ABC , punctul M aparține laturii BC , astfel încât $\sphericalangle BAM = 28^\circ$ și $\sphericalangle MAC = 52^\circ$. Bisectoarea unghiului BAM intersectează latura BC în punctul D , iar bisectoarea unghiului MAC intersectează latura BC în punctul E . Află măsura unghiului DAE .

8. În triunghiul BAC , punctul M aparține laturii BC . Trasează bisectoarele unghiurilor AMB și AMC și arată că acestea formează un unghi drept.

9. Măsurile a trei unghiuri în jurul unui punct sunt direct proporționale cu numerele 7, 11 și 12. Află măsurile celor trei unghiuri.