Capitolul 1. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Unitatea de învățare: Mulțimi

LECȚIA 1. Mulțimi; mulțimea numerelor naturale

Atenție, începem!

Din ce este formată o mulțime?

A1. Precizați prin ce se caracterizează: trandafirii din *buchet*, pepenii din *grămadă*, trandafirul *singur*, cifrele din *grup*, literele din *grup*, parașutiștii din *formație*, păsările din *stol*, respectiv cuvântul *elevele*.

A2. Ce termen ar putea înlocui cuvintele: *buchet, grămadă, grup, formație, stol, cuvânt*?

Care este relația dintre element și mulțime?

A3. Răspundeți la următoarele întrebări:

a) *Trandafirul galben* face parte din mulțimea de trandafiri roșii?
b) Cifra 4 face parte din mulțimea de cifre? Dar cifra 3?
c) Litera *c* face parte din mulțimea de litere? Dar litera *a*?
d) De câte ori apare litera *e* în cuvântul *elevele*? Dar în mulțimea $\{e, l, v\}$?

Ce ne învață teoria?

1. O ***mulțime*** este formată din ***obiecte*** (fizice sau ale gândirii) care au o ***proprietate comună.***

Exemple: Mulțimea elevilor din clasa noastră; mulțimea cifrelor în baza 10.

2. Obiectele din care este formată o mulțime se numesc ***elementele mulțimii.*** Ele sunt distincte, iar ordinea lor nu este importantă.

Exemplu: Elementele mulțimii planetelor din Sistemul nostru Solar sunt: Jupiter, Marte, Mercur, Neptun, Pământ, Saturn, Venus, Uranus.

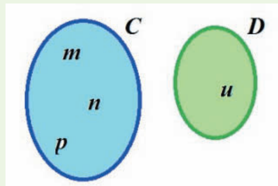
3. O mulțime formată din numere se numește ***mulțime numerică***.

Exemple: Mulțimea cifrelor zecimale este o mulțime numerică; mulțimea județelor țării nu este o mulțime numerică.

4. Mulțimile se notează cu litere mari din alfabetul latin, cu sau fără indici: A, B, C, ... , A_1, A_2,...
Mulțimea care nu are niciun element se numește ***mulțimea vidă*** și se notează cu simbolul $\varnothing$.

5. Mulțimile se reprezintă prin:

- **enumerarea elementelor între acolade**
  (Dacă A este mulțimea literelor din cuvântul *elevele*, scriem $A = \{e, l, v\}$),
- **proprietate caracteristică**
  (Dacă B este mulțimea resturilor împărțirii unui număr natural la 5, scriem
  $B = \{r|\ r$ este rest la împărțirea unui număr natural la 5$\}$,
  de fapt $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$),
- **diagrame Venn–Euler**
  (Mulțimile $C = \{m, n, p\}$ și $D = \{u\}$, din figura alăturată).



6. Între un element și o mulțime vorbim de:

a) ***relația de apartenență***, dacă elementul se regăsește în mulțime și folosim simbolul „$\in$”.

b) ***relația de nonapartenență***, dacă elementul nu se regăsește în mulțime și folosim simbolul „$\notin$”.

***Exemple*: a)** Scriem: $2 \in \{x|\ x$ este cifră pară$\}$ și citim „2 aparține mulțimii cifrelor pare”.

b) Scriem: $3 \notin \{x|\ x$ este cifră pară$\}$ și citim „3 nu aparține mulțimii cifrelor pare”.

c) În diagrama de mai sus, $m \in$ C și $m \notin$ D.

7. Mulțimile pot fi ***mulțimi finite*** (dacă numărul lor de elemente poate fi indicat printr-un număr natural) sau ***mulțimi infinite*** (în caz contrar). ***Cardinalul unei mulțimi X*** reprezintă numărul elementelor mulțimii X și îl notăm ***cardX*** sau **|*X*|.**

***Exemple*:**

a) Mulțimea $D_6 = \{d|\ d$ divide $6\} = \{1, 2, 3, 6\}$ este finită deoarece $cardD_6 = 4$;

b) $\{n\,|\,n \in \mathbb{N}, n$ este număr prim, $n \vdots 10\} = \varnothing$, iar $card\varnothing = 0$.

***Observație*:** $\{0\} \neq \varnothing$.

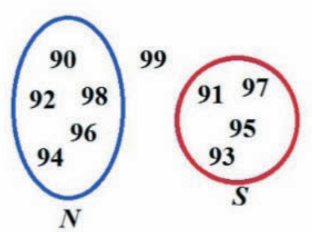
c) Mulțimile $\mathbb{N} = \{n|\ n$ este număr natural$\}$, $P = \{n|\ n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$, $I = \{n|\ n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$ sunt infinite.

Să vedem ce am înțeles

Referindu-ne la diagrama Venn-Euler alăturată, să scriem:

a) relația dintre fiecare element și fiecare mulțime dată prin diagramă, precum și cardinalele acestor mulțimi;

b) elementele fiecărei mulțimi, prin enumerare și apoi folosind o proprietate caracteristică.



Învățăm să rezolvăm

1. Enumerați elementele mulțimii $A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x \text{ număr impar, cu } 3\le x<14\}$.

***Rezolvare*:** Numerele care verifică inegalitățile din enunț sunt: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Dintre acestea le selectăm pe cele impare și obținem $A=\{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$.

2. Scrieți mulțimea $B=\{1,5,25,125,625\}$ folosind o proprietate caracteristică a elementelor.

***Rezolvare*:** Observăm că toate elementele mulțimii B sunt puteri ale lui 5: $1=5^0$, $5=5^1$, $25=5^2$, $125=5^3$ și $625=5^2$, cu exponenții numere naturale de la 0 la 4. Astfel, mulțimea se poate scrie sub forma $B=\{5^n \mid n\in\mathbb{N}, 0\le n\le 4\}$.

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Dă exemple de mulțimi având ca elemente *obiecte*:
a) din clasa ta; **b)** de la matematică; **c)** de la geografie; **d)** de la limba română.

2. Găsește greșeala și rescrie corect mulțimile: $A=\{3, 5, 7, 9, 5\}$; $B=\{x, y, x, z\}$; $C=\{3, 3, 3\}$; $D=\{2, b, 3, b\}$; $E=\{3, a, 5, a, 3\}$.

3. Scrie mulțimea cifrelor numărului: **a)** 233696; **b)** 44223; **c)** 100000; **d)** 111111.

4. Reprodu și completează spațiile punctate cu simbolul potrivit „$\in$” sau „$\notin$”:
a) $2 \ldots \{1, 2, 3\}$; **b)** $m \ldots \{a, b, c\}$; **c)** $7 \ldots \{5, 7, 6, 8\}$; **d)** $0 \ldots \varnothing$.

5. Reprezintă în trei moduri mulțimile: A = Mulțimea cifrelor impare;
B = Mulțimea vocalelor alfabetului latin; C = Mulțimea multiplilor lui 4, mai mici decât 30;
D = Mulțimea numerelor naturale care, înmulțite cu 3, dau 18; E = Mulțimea divizorilor lui 9.

★★

6. Stabilește valoarea de adevăr a următoarelor enunțuri:
a) $2\in\{x \mid x\in\mathbb{N},\ 3\cdot x-1\}$; **b)** $3\in\{x \mid x=2n, n\in\mathbb{N}\}$; **c)** $0\notin\{x \mid x\in\mathbb{N}, x^2\le 4\}$.

7. Reprezintă fiecare mulțime prin enumerarea elementelor sale:
$A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x<7\}$, $B=\{x \mid x\in\mathbb{N}, 3\le x<8\}$, $C=\{x \mid x\in\mathbb{N}, 7\,\vdots\, x\}$,
$D=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x+3=4\}$, $E=\{x \mid x\in\mathbb{N}^*, x-1\le 2\}$.

★★★

8. Reprezintă fiecare mulțime, folosind proprietatea caracteristică a elementelor sale:
$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, $B=\{0,2,4,\ldots,16\}$, $C=\{1,3,5,7,\ldots,15\}$,
$D=\{0,3,6,9,12,15\}$, $E=\{0,1,4,9,16,25,36\}$.

9. Precizează care dintre următoarele mulțimi sunt finite și care sunt infinite:
$A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, 5\cdot x+4=19\}$, $B=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x-7<3\}$,
$C=\{x \mid x=3n, n\in\mathbb{N}\}$, $D=\{x \mid x=3n+2, n\in\mathbb{N}\}$.