

# 1

## Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor

### L1. Mulțimi

**Puțină istorie** Studiul sistematic al mulțimilor a condus la **teoria mulțimilor**, devenită ulterior fundamentală în studiul matematicii. Teoria mulțimilor oferă tuturor ramurilor matematicii o bază comună. Mai mult, metodele raționamentului matematic sunt o combinație de argumente logice și de teoria mulțimilor.

Fondatorul **teoriei mulțimilor** este **Georg Cantor**, matematician german (184–1918).



#### Ne amintim!

O mulțime este o colecție de obiecte bine determinate și distincte (elementele mulțimii), considerată ca entitate.

Dacă  $A$  este o mulțime și  $x$  este un element al său, vom spune că  $x$  aparține mulțimii  $A$  și vom scrie  $x \in A$ .

Dacă  $x$  nu este element al mulțimii  $A$ , vom scrie  $x \notin A$ .

Mulțimea care nu are niciun element se notează cu simbolul  $\emptyset$  și se numește *mulțimea vidă*.

O mulțime care are un număr finit de elemente se numește *mulțime finită*, iar numărul elementelor sale se numește *cardinalul mulțimii*.

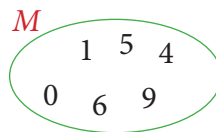
O mulțime *numerică* este o mulțime ale cărei elemente sunt numere.

O mulțime poate fi definită (descrisă, dată, scrisă) astfel:

1) *enumerând elementele mulțimii*

$$M = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$$

2) *prin diagrame Venn-Euler*



3) *enunțând o proprietate comună a elementelor mulțimii*

$$M = \{x \mid x \text{ poate fi ultima cifră a unui pătrat perfect}\}$$

Pentru  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ , vom scrie:

$$1 \in A, 3 \in A, 5 \in A, 7 \in A, 9 \in A.$$

$$0 \notin A, 2 \notin A.$$

Mulțimea elevilor din clasa a VIII-a, care nu au absolvit clasa a VII-a, nu conține niciun element, deci este mulțimea vidă.

$A = \{\text{Ana, Alexandra, Adrian}\}$  este o mulțime finită și cardinalul său este 3.

Vom scrie  $\text{card } A = 3$ .

$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$  este o mulțime numerică, iar  $C = \{\text{alb, albastru, auriu, argintiu}\}$  este o mulțime *nenumerică*.

### Rezolvăm și observăm

1

Se notează cu  $M$  mulțimea literelor din care este format cuvântul „cale”.

AI

- Decideți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.  $l \in M$ ;  $a \in M$ ;  $e \in M$ ;  $m \in M$ .
- Descrieți mulțimea  $M$ , enumerând elementele acesteia.
- Reprezentați mulțimea  $M$  cu ajutorul unei diagrame Venn-Euler.
- Folosind observația că **dacă  $x$  este un element oarecare al mulțimii  $M$ , atunci  $x$  este literă a cuvântului „cale”**, descrieți mulțimea  $M$  prin proprietatea comună a tuturor elementelor sale.

2

Se consideră mulțimile:  $A = \{x \mid x \text{ este literă a cuvântului „succes”}\}$  și  $B = \{x \mid x \text{ este cifră impară}\}$ .

AP

- Identificați elementele mulțimilor  $A$  și  $B$ , apoi scrieți mulțimile, enumerând elementele.
- Decideți care dintre cele două mulțimi este numerică.

## Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

**Aplicația 1.** Se consideră mulțimile:

$$A = \{a \in \mathbb{Z} \mid -10 < a \leq 30\},$$

$$B = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = \sqrt{a}, a \in A\}.$$

**a)** Determinați cardinalul mulțimii  $A$ .

**b)** Scrieți mulțimea  $B$ , enumerându-i elementele.

**Aplicația 2.** Decideți care dintre mulțimile următoare este finită și care este infinită:

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este divizor al numărului } 50\};$$

$$D = \{y \in \mathbb{N} \mid 50 \text{ este divizor al numărului } y\};$$

$$E = \{t \in \mathbb{N} \mid t = 7n + 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

**Soluție.** **a)** Mulțimea  $A$  conține 9 numere întregi negative, numărul 0 și 30 de numere întregi pozitive, deci card  $A = 40$ . **b)** Din  $b \in \mathbb{Z}$  și  $b = \sqrt{a}$ , rezultă că  $a$  este pătrat perfect. Cum  $a \in A$ , obținem  $a \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$ , deci  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .

**Soluție.**  $C = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$  este mulțime finită.

$D = \{0, 50, 100, 150, \dots\}$  este mulțime infinită. Pentru fiecare număr natural  $n$ , se obține un număr  $t$ , unic. Cum mulțimea  $\mathbb{N}$  este infinită, rezultă că  $E$  este mulțime infinită.



## Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

**1** Se consideră mulțimile, date prin enumerarea elementelor:  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ;  
 $B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ ;  $C = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$ .  
 Scrieți fiecare mulțime printr-o proprietate caracteristică a elementelor sale.

**2** Scrieți mulțimile, enumerând elementele fiecăreia:  
 $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2 \leq x < 7\}$ ;  
 $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } -3 \leq x < 2\}$ ;  
 $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } -3 \leq x < 2\}$ ;  
 $D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 11 < x^2 \leq 50\}$ ;  
 $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } 12 \leq x^2 \leq 47\}$ ;  
 $F = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } 14 \leq 3x^2 < 122\}$ .

**3** Se consideră mulțimea  
 $M = \left\{-7; -\frac{1}{3}; -\sqrt{4}; 0; \sqrt{2}; \sqrt{3}; 0,5; 7\right\}$ .  
 Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile:  
 $A = \{x \in M \mid x \in \mathbb{N}\}$ ;  $B = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\}$ ;  
 $C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}\}$ ;  $D = \{x \in M \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ .

**4** Se consideră mulțimile  $A = \{2, 3, 4\}$  și  
 $B = \{1, 2, 3, 6\}$ . Determinați mulțimea

$$C = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in A, b \in B\right\}.$$

**5** Gândiți-vă la o mulțime care are cardinalul 5, apoi scrieți-o în cele trei forme învățate: enumerând elementele mulțimii, printr-o diagramă Venn-Euler, enunțând o proprietate comună a elementelor mulțimii.

**6** Fie mulțimea  $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 13 < 31\}$ .  
 Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor, folosind modelul dat:

Propoziția	Justificare și răspuns
$13 \in M$	$13 \in \mathbb{N}$ , $13 - 13 = 0$ și $0 < 31$ , deci propoziția este adevărată.
$31 \notin M$	
$44 \in M$	
$3^3 \notin M$	
$-13 \in M$	



**7** Fie mulțimea  
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 4 < 25 \text{ și } 2x > 10\}$ .  
**a)** Determinați elementele mulțimii.  
**b)** Precizați, pentru fiecare dintre numerele 2; 4; 5; 11; 25; 30, dacă aparține sau nu mulțimii  $A$ .

**8** Fie mulțimea  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5x^2 < 225\}$ .

**a)** Determinați elementele mulțimii  $B$ .

**b)** Precizați care dintre elementele mulțimii  $B$  este cub perfect.

**9** Fie mulțimea  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x^3 < 600\}$ .

**a)** Determinați elementele mulțimii  $C$ .

**b)** Precizați care dintre elementele mulțimii  $C$  este pătrat perfect.

**c)** Precizați care sunt elementele mulțimii

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3a + 2, a \in C\}.$$